UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI

ENSA AL HOCEIMA

Algèbre I, 2020-2021

TD1 : Logiques & Relations et Applications

Prof. Younes ABOUELHANOUNE

Exercice 1:

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis préciser f^{-1}**

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad I =]-\infty; 2]$.
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, \quad I =]-2; +\infty]$.

Exercice 2 :

Soient A, B, C *et* E des ensembles. Montrer les assertions suivantes :

1. $\forall\ A, B \in P(E) \qquad A \cap B = A \cup B \ \Rightarrow \ A = B$

2. $\forall\ A, B, C \in P(E) \quad A \cap B = A \cap C \ \ et \ \ A \cup B = A \cup C \Rightarrow \ B = C.$

3. $[(A \cap B) \cup C] \cap B = B \cap (A \cup C)$

Exercice 3:

1. **Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+1}$**
Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad x_n > 3$$

2. **En utilisant le raisonnement par contraposition, Montrer que :**

$$\mathbf{x \neq 2} \ \text{ et } \ \mathbf{y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0}$$

3. **Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que**
$a + b\sqrt{2} = 0$ **alors** $a = b = 0$**.**

Exercice 4 :

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{\,n+1} = f^{\,n} o f.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{\,n+1} = f o f^{\,n}$

Exercice 5:

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **et** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **telles que**

$$f(x) = 3x + 1 \textbf{ et } \quad g(x) = x^2 - 1.$$

Vérifier que $fog = gof$

Exercice 6 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **définie par** $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)}$.

1. f **est-elle injective ? surjective ?**
2. **Montrer que** $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 7:

Soit l'application f **définie comme suit :**

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} \end{array}$$

1. f **ainsi définie est-elle injective ? surjective ?**
2. **Donner l'expression de** $(f \circ f)(x)$.
3. **Déterminer l'expression de** $f^{-1}(x)$
4. **Soit** T **la relation définie sur** $]1; +\infty[$ **par :**

$$xTy \Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

Montrer T **que est une relation d'ordre.**

Exercice 8 :

Soit la relation définie sur $\mathbb{R}$ **par**

$$xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. **Montrer que** R **est une relation d'équivalence.**
2. **Déterminer la classe d'équivalence de** x **de** $\mathbb{R}$.